Калибровка Лоренца и электромагнитное поле диполей в анизотропной среде

Кадников С.Н., д-р техн. наук, Ометова М.Ю., канд. техн. наук

Рассматривается методика расчета электромагнитного поля с использованием уравнений Максвелла и векторных потенциалов. Установлено, что условие калибровки Лоренца может быть получено непосредственно из уравнений поля. Показано, что принципиального различия в методике расчета с использованием векторов поля и векторных потенциалов не существует.

Ключевые слова: электромагнитное поле, анизотропная среда, диполь, фундаментальные функции.

Lorentz gauge and electromagnetic field of dipole sources in the anisotropic medium

The design procedure of an electromagnetic field with use of the equations of Maxwell and vector potentials is considered. It is established that the condition of Lorentz gauge can be received directly from the field equations. It is shown that there is no distinction of kind in a design procedure with use of vectors of a field and vector potentials.

Keywords: electromagnetic field, anisotropic medium, dipole, fundamental functions.

При разработке методики расчета электромагнитного поля в анизотропной среде основной задачей является определение фундаментальных решений уравнений Максвелла, т.е. электромагнитных полей дипольных источников (электрических или магнитных диполей), которые в общем случае до сих пор не получены [1]. Актуальность этой задачи определяется еще и тем, что фундаментальные решения уравнений Максвелла используются при построении математических моделей для решения краевых задач методом интегральных уравнений [2].

Известно, что фундаментальные решения в изотропной среде можно искать двумя способами – путем прямого решения волновых уравнений относительно векторов поля или путем предварительного введения векторных потенциалов и условий калибровки для получения волновых уравнений уже относительно этих потенциалов.

Рассмотрим первый способ. Для безграничной однородной изотропной среды из уравнений Максвелла

$$rot\vec{H} = \gamma_k \vec{E} + \vec{\delta}_э, \qquad (1)$$

$$rot\vec{E} = -j\omega\mu_0\mu\vec{H}, \qquad (2)$$

где $\gamma_k = \gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon$, можно получить уравнение

$$\Delta\vec{E} - k^2\vec{E} = j\omega\mu_0\mu\vec{\delta}_э, \qquad (3)$$

где $k = \sqrt{j\omega\mu_0\mu\gamma_k}$. К этому уравнению должно быть добавлено еще одно уравнение:

$$div\vec{E} = 0, \qquad (4)$$

которое является следствием уравнения (1) и обеспечивает равносильность уравнений (3), (4) и уравнений (1), (2).

Если заменить функцию $\vec{\delta}_э$ в (3) на произведение $\vec{p}\delta$, где $\vec{p}$ – постоянный вектор с размерностью плотности тока; $\delta = \delta(x, y, z)$ – дельта-функция, то можно получить фундаментальное решение волнового уравнения (3) в виде [3]

$$\vec{E} = -j\omega\frac{\mu_0\mu\,\vec{p}_э}{4\pi}\cdot\frac{e^{-kR}}{R}, \qquad (5)$$

где $\vec{p}_э$ – вектор электрического момента с размерностью А·м. Однако эта функция не удовлетворяет уравнению (4), а следовательно, и уравнениям Максвелла. Уравнение, из которого действительно можно найти фундаментальное решение, получается путем взятия ротора от уравнения (2) и последующей подстановки выражения для $rot\vec{H}$ из уравнения (1):

$$rotrot\vec{E} - k^2\vec{E} = -j\omega\mu_0\mu\vec{\delta}_э, \qquad (6)$$

Из уравнения (6) в тех областях, где $\vec{\delta}_э = 0$, непосредственно следует, что условие (4) выполняется тождественно. Оно будет выполняться везде, если считать, что $div\vec{\delta}_э = 0$ во внутренних областях проводника, по которому протекают токи проводимости, что в технических задачах всегда выполняется, если иметь в виду металлические проводники. Из этого следует, что уравнение (6) равносильно уравнениям Максвелла. Поэтому они могут быть непосредственно использованы для нахождения фундаментальных решений, т.е., в конечном счете, любых решений уравнений Максвелла в безграничной однородной среде при заданном распределении источников тока.

Чтобы определить конкретную форму такого рода решений, заменим плотность тока $\vec{\delta}_э$ в уравнении (6) произведением $\vec{p}\delta$ и применим к нему прямое преобразование Фурье:

$$\dot{\vec{E}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{E}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot e^{-j(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})} dxdydz. \qquad (7)$$

Учитывая, что преобразование Фурье дельта-функции равно единице, получаем следующую систему уравнений для компонент векторной спектральной функции $\dot{\vec{E}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$:

$$\left(\overset{*}{p}{}^2+k^2-\dot{x}^2\right)\overset{*}{\dot{E}}_x-\dot{x}\dot{y}\dot{E}_y-\dot{x}\dot{z}\dot{E}_y=-j\omega\mu_0\mu p_x,$$

$$-\dot{x}\dot{y}\dot{E}_x+\left(\overset{*}{p}{}^2+k^2-\dot{y}^2\right)-\dot{y}\dot{z}\dot{E}_z=-j\omega\mu_0\mu p_y, \qquad (8)$$

$$-\dot{x}\dot{z}\dot{E}_x-\dot{y}\dot{z}\dot{E}_y+\left(\overset{*}{p}{}^2+k^2-\dot{z}^2\right)\dot{E}_z=-j\omega\mu_0\mu p_z,$$

где $\overset{*}{p}{}^2=\overset{*}{x}{}^2+\overset{*}{y}{}^2+\overset{*}{z}{}^2$. Решение этой системы нетрудно найти по известным правилам линейной алгебры:

$$\overset{*}{E}_x=-\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{p_x\cdot\dot{x}^2+p_y\cdot\dot{x}\dot{y}+p_z\cdot\dot{x}\dot{z}}{p^2+k^2}-\frac{j\omega\mu_0\mu p_x}{p^2+k^2},$$

$$\overset{*}{E}_y=-\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{p_x\cdot\dot{y}\dot{x}+p_y\cdot\dot{y}^2+p_z\cdot\dot{y}\dot{z}}{p^2+k^2}-\frac{j\omega\mu_0\mu p_y}{p^2+k^2}, \qquad (9)$$

$$\overset{*}{E}_z=-\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{p_x\cdot\dot{z}\dot{x}+p_y\cdot\dot{z}\dot{y}+p_z\cdot\dot{z}^2}{p^2+k^2}-\frac{j\omega\mu_0\mu p_z}{p^2+k^2}$$

или в сокращенной векторной записи

$$\overset{*}{\vec{E}}=-\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{\overset{*}{\vec{p}}\left(\vec{p}\cdot\overset{*}{\vec{p}}\right)}{p^2+k^2}-\frac{j\omega\mu_0\mu\vec{p}}{p^2+k^2}, \qquad (10)$$

где $\overset{*}{\vec{p}}=\vec{i}\dot{x}+\vec{j}\dot{y}+\vec{k}\dot{z}$. Применяя к выражению (9) обратное преобразование Фурье:

$$\vec{E}(x,y,z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\overset{*}{\vec{E}}\left(\overset{*}{x},\overset{*}{y},\overset{*}{z}\right)e^{j(\dot{x}x+\dot{y}y+\dot{z}z)}d\overset{*}{x}\,d\overset{*}{y}\,d\overset{*}{z}, \qquad (11)$$

получим фундаментальное решение (6) в виде

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\gamma_k}\left(\nabla(div)-k^2\right)\vec{p}_э\frac{e^{-kR}}{R}, \qquad (12)$$

где R – расстояние от начала координат, а выражение в круглых скобках следует понимать как оператор, действующий на функцию $\vec{p}_э\dfrac{e^{-kR}}{R}$. Используя фундаментальную функцию (12), можно получить решение уравнения (6) при заданном в объеме V распределении токов с плотностью $\vec{\delta}_э$:

$$\vec{E}_q=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\nabla(div)-k^2\right)\cdot\vec{\delta}_{эp}\cdot\frac{e^{-kR}}{R}dV_p, \qquad (13)$$

где R – расстояние между точкой интегрирования p и точкой наблюдения q.

Введем вспомогательную функцию $\vec{A}$ формулой

$$\vec{A}_q=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V\vec{\delta}_{эp}\frac{e^{-kR}}{R}dV_p. \qquad (14)$$

Тогда выражение (13) можно переписать в виде

$$\vec{E}=-j\omega\vec{A}+\frac{1}{\mu_0\mu\gamma_k}\nabla\left(div\vec{A}\right). \qquad (15)$$

Подстановка этого выражения в (6) дает векторное волновое уравнение относительно $\vec{A}$:

$$\Delta\vec{A}-k^2\vec{A}=-\mu\ \mu\vec{\delta}_э. \qquad (16)$$

Отметим, что для любого решения этого уравнения условие $div\vec{E}=0$ выполняется. Положим

$$\varphi=-\frac{1}{\mu_0\mu\gamma_k}div\vec{A}. \qquad (17)$$

Это соотношение является известным условием калибровки Лоренца, которое в данном случае получено из решения уравнения (6), равносильного уравнениям Максвелла. Иными словами, это условие может быть получено непосредственно из уравнений Максвелла, т.е. является их следствием, в то время как в рамках известной процедуры вывода волнового уравнения (16) из уравнений Максвелла оно вводится явочным порядком, т.е. является только техническим приемом. Поскольку решение вида (12) является единственным, то условие (17) является не только достаточным, но и необходимым для преобразования уравнения (6) (а следовательно, и уравнений Максвелла) к волновому уравнению.

В связи с этим имеет смысл обсудить еще один способ калибровки, основанный на введении соотношения $div\vec{A}'=0$ (кулоновская калибровка). Потенциал $\vec{A}$, определенный формулой (14), этому условию не удовлетворяет, поскольку

$$div\vec{A}_q=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V\left(\vec{\delta}_{эp},\nabla_q\frac{e^{-kR}}{R}\right)dV_p=$$

$$=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V\left(\vec{\delta}_{эp},\nabla_p\frac{e^{-kR}}{R}\right)dV_p=$$

$$=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V div\left(\vec{\delta}_{эp}\frac{e^{-kR}}{R}\right)dV_p+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{e^{-kR}}{R}div\vec{\delta}_{эp}dV_p=$$

$$=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\oint\limits_S\left(\vec{n}_p,\vec{\delta}_{эp}\right)\frac{e^{-kR}}{R}dS_p.$$

В области V (открытой) $div\vec{\delta}_{эp}=0$, однако нормальная составляющая плотности тока $\left(\vec{n},\vec{\delta}_э\right)$ на S нулю не равна. Но если ввести потенциал $\vec{A}'$ условием $\vec{E}=-j\omega\vec{A}'$, то, поскольку $div\vec{E}=0$, условие $div\vec{A}'=0$ будет соблюдено. При этом вместо волнового уравнения (16) приходится использовать уравнение вида (6):

$$rotrot\vec{A}'+k^2\vec{A}'=\mu_0\mu\vec{\delta}_э. \qquad (18)$$

В результате оказывается, что кулоновская калибровка не дает никаких преимуществ по сравнению с методикой прямого расчета векторов поля, основанной на применении уравнения (6).

Таким образом, из вышеизложенного можно сделать следующие выводы. Использование уравнения (6) дает возможность прямого расчета фундаментальных решений уравнений

Максвелла или, что практически то же самое, электромагнитного поля электрического диполя. Что касается магнитного диполя, то здесь нужно использовать уравнение вида (6) относительно $\vec{H}$, которое может быть получено из (1) и (2), если задать в правой части в общем случае (2) плотность магнитных токов, а для расчета фундаментальных решений – дельта-функцию, т.е. действовать по той же схеме, что и в случае электрического диполя.

Однако такой подход не является наиболее экономичным. С вычислительной точки зрения проще использовать векторные потенциалы, т.е. фундаментальные решения волновых уравнений вида (16), и затем вычислять электрическое поле по соотношению (12), а магнитное по формуле $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} rot\vec{A}$, т.е. путем дифференцирования, поскольку это проще, чем вычисление обратных преобразований Фурье от выражений (9).

Рассмотрим теперь методику построения фундаментальных решений, или, что то же самое, расчет электромагнитного поля дипольных источников в анизотропной среде. Уравнения Максвелла запишем в следующем виде:

$$rot\vec{H} = \tilde{\gamma}_k \vec{E} + \vec{\delta}_э, \quad (19)$$

$$rot\vec{E} = -j\omega\tilde{\mu}_a \vec{H}, \quad (20)$$

где $\tilde{\gamma}_k = \tilde{\gamma} + j\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}$; $\tilde{\mu}_a = \mu_0\tilde{\mu}$ – диагональные тензоры комплексной удельной проводимости и магнитной проницаемости с компонентами $\gamma_{kx}, \gamma_{ky}, \gamma_{kz}$; $\mu_{ax}, \mu_{ay}, \mu_{az}$ соответственно.

Умножив уравнение (20) на $\tilde{\mu}_a^{-1}$ и взяв ротор от обеих частей, после подстановки $rot\vec{H}$ из (19) получаем уравнение, являющееся обобщением уравнения (6):

$$rot\tilde{\mu}_a^{-1} rot\vec{E} + j\omega\tilde{\gamma}_k \vec{E} = -j\omega\vec{\delta}_э. \quad (21)$$

Это уравнение может быть преобразовано к следующей системе, которую целесообразно записать в развернутой форме:

$$\Delta_1 E_x - \frac{\partial}{\partial x} div_1 \vec{E} - j\omega\mu_0\mu_y\mu_z E_x = j\omega\mu_0\mu_y\mu_z\delta_{эx}, \quad (22)$$

$$\Delta_1 E_y - \frac{\partial}{\partial y} div_1 \vec{E} - j\omega\mu_0\mu_x\mu_z E_y = j\omega\mu_0\mu_x\mu_z\delta_{эy}, \quad (23)$$

$$\Delta_1 E_z - \frac{\partial}{\partial z} div_1 \vec{E} - j\omega\mu_0\mu_x\mu_y E_z = j\omega\mu_0\mu_x\mu_y\delta_{эz}, \quad (24)$$

где дифференциальные операторы имеют вид

$$\Delta_1 = \mu_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (25)$$

$$div_1 = \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (26)$$

Рассмотрим сначала вариант одноосной среды, когда $\mu_x = \mu_y = \mu \; (\mu \neq \mu_z)$, $\gamma_{kx} = \gamma_{ky} = \gamma_k \; (\gamma_k \neq \gamma_{kz})$. Тогда коэффициенты при E_x, E_y в (22), (23) оказываются равными $j\omega\mu_0\mu\mu_z\gamma_k$ и вектор $\vec{E}$ можно представить в форме

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{\mu_0\mu\mu_z\gamma_k} \nabla\left(div_1\vec{A}\right). \quad (27)$$

При таком представлении уравнения (22), (23) сводятся к двум волновым:

$$\Delta_\mu A_x - k_x^2 A_x = -\mu_0\mu_z\delta_{эx}, \quad (28)$$

$$\Delta_\mu A_y - k_x^2 A_y = -\mu_0\mu_z\delta_{эy}, \quad (29)$$

где $k_x^2 = j\omega\mu_0\mu_z\gamma_k$;

$$\Delta_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \lambda_\mu = \frac{\mu_z}{\mu}. \quad (30)$$

Уравнения (24) преобразуется к виду

$$\Delta_\gamma A_z - k_z^2 A_z = (1-\lambda)\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y}\right) - \mu_0\mu\delta_{эz}, \quad (31)$$

где $k_z^2 = j\omega\mu_0\mu\gamma_{kz}$;

$$\Delta_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \lambda_\gamma = \frac{\gamma_{kz}}{\gamma_k}, \quad \lambda = \frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\mu}. \quad (32)$$

При расчете поля сначала должны решаться уравнения (28), (29), а затем при известных A_x, A_y – уравнения (31). Напомним, что речь идет о расчете поля заданного распределения токов в безграничной однородной анизотропной среде.

Рассмотрим теперь методику решения этой же задачи с использованием векторных потенциалов. Полагая $\tilde{\mu}_a \vec{H} = rot\vec{A}_э$, где $\vec{A}_э$ – векторный электрический потенциал, из уравнения (20) получаем известное выражение для напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A}_э - \nabla\varphi. \quad (33)$$

После подстановки выражений для $\vec{H}$ и $\vec{E}$ в (19) получаем систему уравнений:

$$\Delta_1 A_{эx} - \frac{\partial}{\partial x} div_1 \vec{A}_э - j\omega\mu_0\mu_y\mu_z\gamma_{kx} A_{эx} - \\ -\mu_0\mu_y\mu_z\gamma_{kx} \frac{\partial\varphi_э}{\partial x} = -\mu_0\mu_y\mu_z\delta_{эx}, \quad (34)$$

$$\Delta_1 A_{эy} - \frac{\partial}{\partial y} div_1 \vec{A}_э - j\omega\mu_0\mu_x\mu_z\gamma_{ky} A_{эy} - \\ -\mu_0\mu_x\mu_z\gamma_{ky} \frac{\partial\varphi_э}{\partial y} = -\mu_0\mu_x\mu_z\delta_{эy}, \quad (35)$$

$$\Delta_1 A_{эz} - \frac{\partial}{\partial z} div_1 \vec{A}_э - j\omega\mu_0\mu_x\mu_y\gamma_{kz} A_{эz} - \\ -\mu_0\mu_x\mu_y\gamma_{kz} \frac{\partial\varphi_э}{\partial z} = -\mu_0\mu_x\mu_y\delta_{эz}. \quad (36)$$

Для одноосной среды после использования прежних обозначений и калибровки вида

$$\varphi = -\frac{1}{\mu_0\mu\mu_z\gamma_k}\left(div_1\vec{A}_э\right) \quad (37)$$

система уравнений (36) преобразуется к уравнениям (28), (29), (31) при $\vec{A} = \vec{A}_э$. В результате можно сделать вывод, что никакого принципиального различия с точки зрения процедуры решения при использовании векторов поля и векторных потенциалов, по крайней мере, для варианта одноосной анизотропии не наблюдается. Вопрос состоит только в том, как по векторному потенциалу вычислять вектора поля: либо использовать преобразованные по Фурье уравнения (28), (29), (31) и (27) и затем вычислять вектора поля по известным изображениям с помощью обратного преобразования Фурье, либо определять явные выражения для потенциала по уравнениям (28), (29), (31) (также с использованием преобразований Фурье), но вектора поля вычислять путем дифференцирования с использованием формулы (27) и уравнения (20). Второй способ кажется более простым, однако и он, как показывает практика, связан с довольно громоздкими вычислениями, результаты которых требуют детальной проверки с использованием уравнений Максвелла.

Список литературы

1. **Савченко А.О., Савченко О.Я.** Электромагнитное поле диполя в анизотропной среде // Журнал технической физики. – 2005. – Т. 75. – Вып. 10. – С. 118–121.
2. **Тозони О.В., Маергойз И.Д.** Расчет переменных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1975.
3. **Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.** Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 1983.

Кадников Сергей Николаевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологии,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Ометова Мария Юрьевна,
Ивановский государственный архитектурно-строительный университет,
старший преподаватель,
телефон (4932) 47-20-13.